局部指标理论简介

张伟平

2014年10月8日

陈正祥、张晓根据录音整理

主持人：

金秋十月，今天上午下了一场小雨，就为了这个金秋，金就金在咱们今天特别荣幸请到中国科学院院士张伟平教授来给我们做精彩的报告：Atiyah-Singer 指标理论。有请！

报告人：

非常感谢席南华院士给我发的邀请，因为我近30年前，大概1985年进入数学所，跟虞言林老师学习指标定理，到现在很高兴能来给大家汇报一下。 我首先抱歉，因为我中文的幻灯片不会做，所以仍旧用手写的讲稿。最初给这个演讲的时候，一个下午写的讲稿，后来用了好多次。前半部分， 我本来题目是局部指标理论，讲局部指标理论我先把一般的指标理论简单的介绍一下。因为我看到有很多学生，希望学生们能够知道一下数学中重要定理的来龙去脉。

1 指标定理简介

1.1 从三角形到流形

这个讲稿大约十年前，2004年写的，今年是2014年，十年之后。2004年发生了两件事情，什么事情呢？Atiyah和Singer当年共同获得了2004年的Abel数学奖。 为什么呢？就是因为指标定理，以及他们对数学物理的影响。同时另外一件事情，是陈省身先生获得首届的邵逸夫数学奖， 而陈先生的工作我们会看到对Atiyah-Singer指标定理的形成起到了很大推动作用，都是一脉相承的。本讲的目的，是通过历史回顾介绍指标定理的一个大概，这儿有很多专家在这里，不好意思，希望更多年轻人知道一下。很多人认为，至少有一些人认为，上世纪你单独的拿出两个有代表性的成果来， 这个Atiyah-Singer指标定理可以

占住其中一个。这个指标定理本身，它为什么这么重要呢？我们看到他这里写的是数学物理中的影响，实际上这个定理本身的特点， 它跟数学的各个学科，几乎都有密切的关系，所以它不但是一个定理，而且是包含了数学各分支的关系。它本身就是把拓扑和分析联系起来，同时对很多数学领域都有影响。 这本身光看看就是比较错综复杂的，所以说你要想介绍这样一个定理，在一个小时之内几乎是不太可能的。所以说我们需要一个参照物。 我那时候找的参照物就是杨振宁先生的一首诗。杨振宁先生的诗说什么呢？

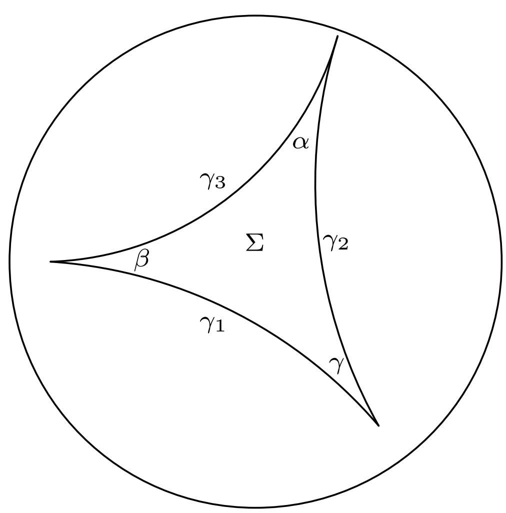
天衣岂无缝，匠心剪接成。

浑然归一体，广邃妙绝伦。

造化爱几何，四力纤维能。

千古寸心事，欧高黎嘉陈。

我们用最后一句，“千古寸心事，欧高黎嘉陈”。千古寸心事是从杜甫的诗“文章千古事，得失寸心知”过来的， 然后杨振宁先生以这首诗赞颂陈先生在几何界的地位是直追他前面这几个的。欧是指欧几里得，高是高斯，黎是黎曼，嘉是嘉当（埃利·嘉当，昂利·嘉当的父亲）， 陈是陈先生。所以我们借由这首诗，从这首诗的秩序我们来看一下几何学发展大致的脉络，可以看到指标定理是非常自然产生出来的。我们从欧几里得开始， 欧几里得最著名的是他的《几何原本》，它原文就叫“Elements”，并不叫几何，是对当时古希腊数学包罗万象的阐述。它里面两个最著名的定理， 一个是平面三角形的内角和为180度，然后第二个是说素数的个数是无限的。然后从这两支分别引出了几何跟数论的无限的发展。正好有意思的是上个世纪， 我们中国两位伟大的数学家分别对这两个分支做出了巨大的贡献。对数论发展做贡献的，是华罗庚先生华老。这里这一讲我们主要讲几何， 另外一个分支的发展路线。

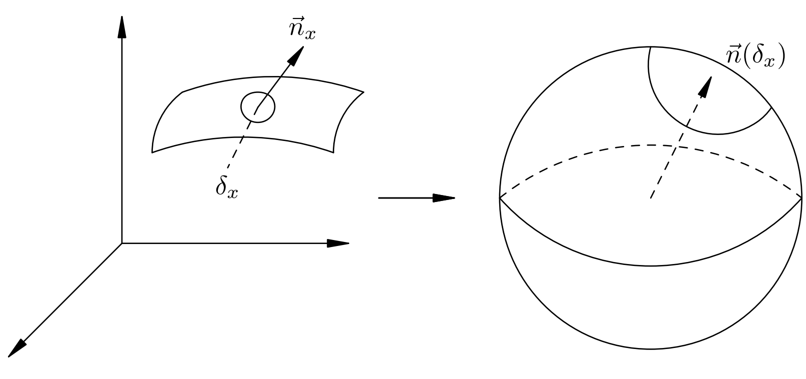


当然从欧几里得跳到高斯，这中间笛卡尔起的作用也是非常重要的，我们先跳过去。从微分几何的角度来讲， 我们跳到高斯。高斯被誉为数学王子，是伟大的数学家，天才，年轻的时候就做出伟大的贡献，而微分几何是他50岁以后建立的。 所以说并不是像很多人想象的，很多人的观点是数学是年轻人做的，年纪大点就不能做。高斯那个时候是哥廷根天文台的台长，他要去做大地测量， 他想办法去量，量出来以后，发现球面上，至少对球面上来说，三角形内角和不等于π。所以他得到的公式如果对弯曲的三角形来说，如果取个曲面片， 取三角形。我们假定α、β、γ 是三角形的内角(见上图), γ_1、γ_2、γ_3 是三角形的三条边， 你要学过二、三年级曲面论的话，就变成这个东西:

$$(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)+\int_{\gamma_1} k_g d\gamma_1+\int_{\gamma_2} k_g d\gamma_2+\int_{\gamma_3} k_g d\gamma_3+\int_{\Sigma} K d\,\mathrm{Vol}_{\Sigma}=2\pi.$$

就是外角的和，加上边上测地曲率k_g的积分，再加上整个曲面上高斯曲率K的积分等于2π。

这个是在弯曲的曲面上，欧几里得公式的推广，这里k_g是测地曲率；而K是这个曲面本身上的一个函数，刻划弯曲程度的一个量，叫高斯曲率。 而这个高斯曲率，如果你把曲面嵌入到欧氏空间的话，可以通过第一基本形式、第二基本形式，就像我们在大学里三年级学的来定义。 但是这个依赖于第一、第二基本形式和你的嵌入。

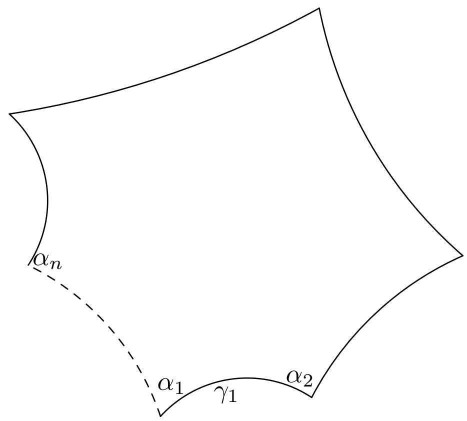


$\vec{n}\,:\,\Sigma\to S^2$ normal vectors

而高斯本身有一个更几何的定义，比如说你有一个曲面Σ，你任何取一点$x\in\Sigma$，作它的单位长法向量，就把它映到单位球面， 而你这一点取一个小的邻域δ_x，映过来就变成一个小的区域$\vec{n}(\delta_x)$，用区域的面积除以原来这个小的邻域的面积， 当把这个邻域取充分小，然后它趋于0时极限就存在：

$$K(x)=\lim_{\delta_x\to x}\frac{\mathrm{Area}\,(\vec{n}(\delta_x))}{\mathrm{Area}\,(\delta_x)}$$

（更精确地说，这里"Area"应指"有向面积"）。这个$K(x)$是更内蕴的定义，相当于刻划这个曲面，相对来说，在x点是如何弯曲的程度。 它是由这个曲面上本身的度量决定的，不依赖于它的嵌入的第一、第二基本形式（原来是很复杂的公式）。如果我们在平面上，平面三角形的话， 则$k_g = K = 0$，就得到平面三角形内角和公式：$\alpha + \beta + \gamma = \pi$。高斯这个定理，是欧几里得的定理在弯曲三角形时的推广。



然后同时代的法国数学家Bonnet将高斯的定理推广到弯曲的多边形情形：

$$\sum(\pi - \alpha_i) + \sum \int_{\gamma_i} k_g d\gamma_i + \int_\Sigma K d\,\mathrm{Vol}_\Sigma = 2\pi\chi,$$

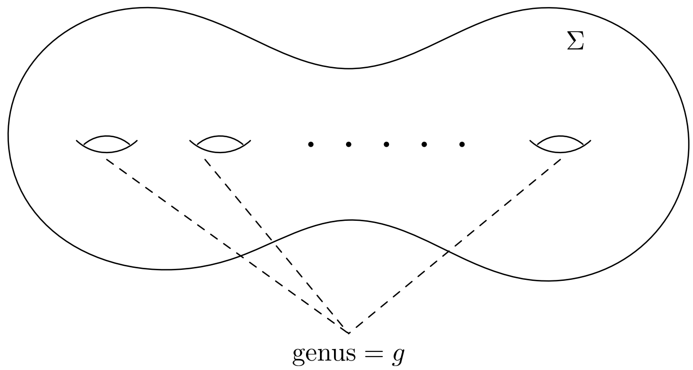
这里$\chi = E - F + G = 1$，其中E表示多边形顶点的个数，F表示多边形边的条数，G表示多边形面的个数。这类公式有了高斯的原创性的工作，加上Bonnet 的推广，统称Gauss-Bonnet定理，对二维微分几何具有基本的重要性。

然后我们看闭曲面的情形，也是最简单的，如果是闭曲面的话，没有边没有角了，左边剩下K，右边这个时候χ有贡献。对闭曲面的情形， 因为一个可定向的封闭的曲面，你整体的考虑，拓扑上可以看成这样的东西，上面洞的个数记为g, 称为曲面的亏格, 拓扑上的定义。

我们假定这个曲面，可以嵌入到一个欧氏空间去，它诱导一个度量变成一个黎曼的曲面的话，在每一点我们就有高斯曲率。 如果对这个封闭曲面Σ，右边的χ我们记为$\chi(\Sigma)$，那么Gauss-Bonnet定理就可以写为：

$$\int_\Sigma K d\,\mathrm{Vol}_\Sigma = 2\pi\chi(\Sigma).$$

这里的$\chi(\Sigma) = 2 - 2g$，称为这个闭曲面的欧拉示性数。这个欧拉示性数有多种定义，第一个就是$2 - 2g$，跟曲面上洞的个数有关；第二个， 你给出曲面的一个三角形剖分，它顶点



的个数E减去线段的条数F，加上面的个数G就等于这个：$\chi(\Sigma)=E-F+G$，这个是组合的定义。 当然对于不同的三角形剖分，你每个E、F、G可能都不一样，但是这个定理告诉你，不管怎么样剖分，万变不离其宗，最后得到的是统一的不变量。

从拓扑上来讲，这个g只跟洞的个数有关，而这个K，如果曲面度量改变（你上面捏一下，再嵌入欧氏空间），K函数就会变，但是不管K怎么变， 积分以后，右边是不变的。也就是说高斯曲率本质上是局部逐点定义的函数，而欧拉示性数$\chi(\Sigma)$是整体定义的，是个拓扑不变量。 所以说Gauss-Bonnet定理，纯粹的从哲学角度或者美学角度讲，它是在局部和整体之间，通过积分建立一个桥梁：

$$\int(\mathbf{local}) \;=\; \mathbf{global}.$$

备注：这个公式本身并不是高斯跟Bonnet的，Gauss-Bonnet是关于多边形的。这个对封闭曲面本身是很后来，由Van Dyck提出来的。 现在大家公称这个公式为Gauss-Bonnet，说明在数学里面大家还是认可原创性最重要。

我们从数学上来看，如何做推广。欧、高、黎，我们从高斯直接跳到黎曼。黎曼当然是非常伟大的，黎曼假设是Clay七大数学问题的第一个问题， 一个以复函数面目出现的数论问题。 同时他薄薄的论文集，几乎每篇论文都开创了一个新的学科，他也是函数论大家。他对微分几何的基本贡献，我们现在看到他的教授资格论文， 相当于我们博导通过这个论文就可以带学生。他那个论文有六页左右，其中引进了高维黎曼空间的概念，这个我们现在叫做流形。 他主要是局部定义了高斯曲率在高维的推广，现在称为黎曼曲率张量。而黎曼的动机主要来自复变函数论和电磁学。黎曼的全文只包含一个公式：

$$g^{\Sigma}=\frac{(dx_1)^2+(dx_2)^2+\cdots+(dx_n)^2}{\left(1+\frac{K}{4}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\right)^2}.$$

这里Σ表示n维区域，g^{Σ}表示它的度量，则Σ具有常曲率K。

因为黎曼没有给证明，很多人都赞扬黎曼有伟大的直觉。下面这个是陈先生喜欢讲的一个故事，分享一下。Siegel，最早的沃尔夫奖获奖人之一。 Siegel是黎曼的学生，他在哥廷根，有机会有权力去黎曼的办公室看黎曼的手稿。他发现黎曼为了算这个公式整整算了四十页，写出来就写了一个。 陈先生跟我们讲，如果有一个数学家告诉你，他有很伟大的直觉，是天才，你千万不要相信。

讲到黎曼就提出了高维几何研究的对象，高维黎曼几何的发展首先需要对高维空间对象有严格的描述与定义，这就是我们说的流形。你假定把流形看成黎曼引 进的。但是黎曼实际上只考虑了局部的流形。比如说三角形，二维的时候，你要过渡到封闭曲面，就要过渡到整体的流形的概念，这个最早是Hermann Weyl在他经典的著作，原文是德文的，《黎曼面的概念》里发展的。他写这个的时候才二十来岁。所以说我们从三角形开始，通过高斯，黎曼，到Hermann Weyl，已经有了几何真正研究的对象－流形。陈先生在一篇通俗报告《从三角形到流形》里，把几何学划分为下面几个时代：第一个欧几里得是原始人时代； 后来笛卡尔是综合人时代，因为那时有了工具可以用坐标了；而到了二十世纪初，流形奠定好了就进入了现代人时代了。

1.2 Gauss-Bonnet-Chern定理与Chern-Weil理论

那么自然的问题是我们要如何做一个现代人。首先自然是要发展流形上的几何。这个时候就过渡到嘉当了。嘉当，一言以蔽之，将微积分的理论， 来推广到流形上去，发展了所谓的外微分运算，有一整套的工具。微积分可以搬到流形上去做，这个理论在嘉当的时候成熟起来。 陈先生自己早年在德国做完博士以后，到巴黎去跟嘉当做了一年博士后，苦读嘉当的文章，逐渐得到了其中的精髓。嘉当的文章， 包括Hermann Weyl在内都公认的难读。

总而言之，我们刚才说的，至少在二维的时候，Gauss-Bonnet定理是黎曼几何最基本的定理。那么现在高维基本的工具都有了，自然的问题是， Gauss-Bonnet公式如何推广到高维。Heinz Hopf，20世纪伟大的几何学家和拓扑学家，在他的博士论文里面，解决了欧氏空间超曲面的情形， 就是欧氏空间余一维的子流形的情形，并称一般情形的解决是当时微分几何中最重要的问题。这应该是上世纪二、三十年代左右的时候。

现在我们回顾一下二维的Gauss-Bonnet公式：

$$\int_\Sigma K d\,\mathrm{Vol}_\Sigma = 2\pi\chi(\Sigma).$$

因为代数拓扑在上世纪上半叶有长足的发展，大家都知道欧拉示性数如何推广到高维。

左边推广到高维就成了最要紧的问题。 第一个得到的成功是Allendoerfer跟Weil。Weil是布尔巴基学派的创始人，因为二战的时候，他跑到美国，在一个小学校， Allendoerfer是他的一个同事，他们两个人做出了这个工作。我这里（讲稿上）写的Ahlfors是怎么回事呢？Ahlfors曾经在欧洲的某个地方， 两个人在逃避纳粹的时候碰到了。碰到了以后，Ahlfors就跟Weil讲，你如果能把Gauss-Bonnet推广到高维，我就能把值分布论推广到高维。 后来Weil做完了以后，Ahlfors高维的值分布理论并没有做出来。现在我们知道，光有这个Gauss-Bonnet定理不够，还需要高阶的陈省身示性类。 陈先生后来在这方面写了很多文章，把值分布理论推广到高维。我们回到这里，Allendoerfer-Weil对黎曼多面体（黎曼多面体是黎曼流形， 但是又可以带角的，相当于（二维时）多边形可以带角的这种东西，它带角的就比黎曼流形本身要复杂）定义出了明确的曲率函数， 证明了它的积分等于欧拉示性数。可以说推广到高维的Gauss-Bonnet定理，Allendoerfer跟Weil解决了。但是你有点不满意的地方是什么呢？ 首先这个证明不是内蕴的，因为有很多角很复杂，你看的不是太清楚；第二个，证明要把黎曼流形的每个局部都要等距的嵌入到高维欧氏空间。 因为那个时候Nash的等距嵌入定理还没有（Nash嵌入定理是五十年代的事），所以整个证明就显得比较难，不大容易懂。这两点不太令人满意。 Nash他的博士论文是做博弈论的，后来得了诺贝尔奖，显然他的等距嵌入定理要比他的博弈论定理更加深刻。

现在我们就可以来讲陈省身先生的历史贡献了。陈先生的这个历史贡献是什么呢？就是陈先生彻底的解决了这个问题！为了更详细， 我们具体介绍一下这个定理。我们假定$\left(M, g^{TM}\right)$是一个闭的定向的黎曼流形，R^{TM}是它的黎曼曲率。 黎曼曲率在局部上，用局部坐标可以写成一个反对称矩阵，其中元素为二次微分形式。我们假定流形是偶数维的。

如果一个反对称矩阵A是偶数阶的，那么它可以对角化写成：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & & \\ -a_1 & 0 & \cdots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \cdots & 0 & a_n \\ & & \cdots & -a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

定义： $\mathrm{Pf}(A) := a_1 a_2 \cdots a_n$.

现在R^{TM}是元素为二次微分形式的反对称矩阵，如果流形M的维数为$\dim M = 2n$，则

$$\mathrm{Pf}(R^{TM}) := a_1 a_2 \cdots a_n$$

是流形上的$2n$形式，也就是流形上的体积形式乘上一个函数，可以积分。

Gauss-Bonnet-Chern 定理（1944）

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{M^{2n}} \mathrm{Pf}(R^{TM}) = \chi(M),$$

这里$\chi(M)$是M的欧拉示性数。

这是Gauss-Bonnet定理的高维推广，是个可以很简单的叙述，很明快的一个定理。陈先生的证明是内蕴的，跟Allendoerfer-Weil的不一样。 Allendoerfer-Weil 的证明是把每一个局部的东西都嵌入到高维的地方去做。而陈先生是第一次，他直接做切丛的单位球丛，单位长向量全体组成了一个单位球丛，这个只依赖于度量，不依赖于外在空间。然后他在这个上面用他从嘉当那里学到的东西去计算， 把底流形上的问题提升到更大维数的空间上。比如说底流形是k维的，那么单位球丛是$2k-1$维。如果底流形是3维的，那么单位球丛是5维。 放在更高维的空间里做，这个想法的英文名叫“transgression”。陈先生是第一个，数学史上第一次使用这个观念。就是你在下面做不到的话， 就到上面去做，做完了再把问题拉回来。中文命名蛮有意思的叫“超渡”。有了超渡的观念后，具体的技术工具是运用嘉当发展起来的外微分运算。 当然陈先生在巴黎时从嘉当那儿学到了精髓。

从基本哲学上，刚才说了也是局部逐点定义的几何量，通过积分以后得到整体的拓扑不变量，这个哲学在高维的发扬光大。

接着该如何呢？陈先生接下来的一个问题是什么呢？就是说Gauss-Bonnet这个公式是用局部的微分形式来表示整体的拓扑不变量， 对其他的拓扑不变量能不能找到，有什么样其他的拓扑不变量，也可以用微分形式来表达出来？这个是陈先生问自己的一个问题： 如何用微分形式来表示其他的拓扑示性数。而当时是40年代中期，有些什么示性类呢？有两个有名的拓扑不变量， 那时候备受关注的，一个是Stiefel－Whitney类，一个是Pontrjagin类，它们都是对实的向量丛定义的。但是它们的困难在于什么呢？ 困难在于Stiefel－Whitney类是模2定义的。所谓模2定义什么意思呢？就是如果x不等于零，$2x$可以等于零的， 你要学抽象代数的话，知道这种东西存在的，你要乘上有理数那不一定。如果你有一个微分形式的话，乘上去，两倍的微分形式等于0， 那这个微分形式本身就等于零。这个是潜在的差异。包括Pontrjagin类，纯拓扑定义的话也有这样的困难。陈先生有一个简单的观察： 如果我不考虑实向量丛，而考虑复向量丛的话，模2性质就消失了。由此他发现了复向量丛的示性类，现在通称为陈类 [1]。 而且由此陈先生又发展了微分形式，发现微分形式能够表示陈类，也能表示无挠的Pontrjagin类。这样整个发展出一套示性类的几何理论， 现在通称为Chern-Weil理论，在几何、拓扑、甚至数学物理里面有着举

[1]陈类，Pontrjagin类，Stiefel－Whitney类都是吴文俊先生在他的国家博士论文里第一次正式命名的。

足轻重的作用。

最初写这个讲稿的时候，2004年，Gauss-Bonnet-Chern定理正好发表是60年，今年是70年，我们说60岁（院士据说就是70岁）就退休了。 但是优美的数学定理，就永远在那里。Gauss-Bonnet-Chern定理的证明以及它由此带来的影响、 发展被认为是开创了整体微分几何一个新的时代。

我们概要地回顾一下。首先，陈先生解决了正确的问题，即被Hopf称作的微分几何中最重要的问题；其次是引进和使用了正确的方法： 他第一次使用了"transgression"的观念，"transgression"后来在几何拓扑应用非常广泛的。 同时他使用了从嘉当那里学到的秘密武器；第三是开辟了正确的方向：整体微分几何由此进入了一个新的阶段。 当年写讲稿的时候大家都在讲三个代表，所以我们用三个正确来对应。

所以说本来是一小时就没时间，现在既然是有时间的话，一个半小时，我们顺便看一下陈类的定义。如果是复向量丛， 看微分形式是怎么来的。如果是流形M 上有一个复向量丛E，然后有一个E 上的联络∇^E， 它的平方（称为曲率）$R^E = \left(\nabla^E\right)^2$ 在局部上是以二次微分形式为元素的矩阵。我们就可以定义：

$$\begin{aligned} c\left(E, \nabla^E\right) &= \det\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^E\right) \\ &= 1 + c_1\left(E, \nabla^E\right) + c_2\left(E, \nabla^E\right) + \cdots . \end{aligned}$$

这里$c_i(E) := \left[c_i\left(E, \nabla^E\right)\right] \in H^{2i}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$， 不依赖于$\nabla^E$的选取，被称为第$i$ 个陈类。如果$E = TM \otimes \mathbb{C}$就得到流形的有理Pontrjagin示性类。

陈类是很基本的一个不变量，很简单，有了联络、曲率，一下子就出来了。陈先生曾回忆说， 想到要用复向量丛是一个平凡的观察（trivial observation）。但这话只能他自己说。我看过一篇陈先生的采访。 采访者说起这是一个平凡的观察，陈先生的回答是"还要靠能力"。这个和前面讲的陈先生喜欢讲的关于Siegel的故事是一脉相承的。

1.3 Hirzebruch符号差定理与Hirzebruch-Riemann-Roch定理

跟随着陈先生的理论，示性类理论得到了巨大的发展。陈先生的论文是1945年发表的，下一步是Hirzebruch的符号差定理。

符号差本身很好定义，对于$4k$维流形M，有一个很自然的对称双线性型：

$$H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \times H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \to H^{4k}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$$

定义为

$$\Big([\omega'],[\omega]\Big)\mapsto\int_M\omega'\wedge\omega.$$

对称双线性型相当于对称矩阵，对称矩阵有正的特征值，也有负的特征值。正的特征值的个数减去负的特征值的个数就称为它的符号差。 如果取上面的middle cohomology上的双线性型，得到的符号差就称为流形的符号差，是纯粹的拓扑不变量。 这个定义最早是在Hermann Weyl用西班牙语写的一篇小文章里出现的。

Hirzebruch符号差定理是说什么呢？假如M^{4k}是$4k$维定向的闭流形，然后我们来看一个函数$\frac{x}{\tanh x}$。 他发现如果用$\frac{R^{TM}}{2\pi\sqrt{-1}}$ 代替x，这么复杂的函数你把它展开的话就是偶函数，二次形式平方就变成四次， 所以这些微分形式展开以后，都变成四次微分形式的乘积的线性组合，所以说一般在$4k$维流形上积分有意义。

Hirzebruch符号差定理是说下面的公式成立：

$$\mathrm{Sign}(M^{4k})=\int_M\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{R^{TM}}{2\pi\sqrt{-1}}}{\tanh\left(\frac{R^{TM}}{2\pi\sqrt{-1}}\right)}\right).$$

因此，右边这么复杂的一个微分形式，在流形上的积分是个整数。而且不但是整数，就等于这个流形的符号差。

Hirzebruch的这个定理是1953年证明的，马上1956、1957年就被Milnor用来构造他的七维怪球。而Hirzebruch的证明是用到Thom发展起来的配边理论。 Thom和Milnor因为他们的这些工作都获得了菲尔兹奖。

然后Hirzebruch同时在他那本书里，最主要是证明复流形上的Riemann-Roch定理，把黎曼面情形推广到高维。我们不去管他复流形的东西， 我们给一个复流形，然后给这个R^{TM}，

$$\widetilde{\chi}(M)=\int_M\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-\frac{R^{TM}}{2\pi\sqrt{-1}}}{1-e^{\frac{R^{TM}}{2\pi\sqrt{-1}}}}\right).$$

右边的被积项叫做Todd示性类，也是这么一个复杂的函数，积分以后是整数。这里面是复流形，但是我们不去管它，我们只关心这个， 这么复杂的一个积分都是整数。Hirzebruch 同时证明的上面两个定理，引起了轰动，整个几何拓扑新的篇章从这里开始。

Hirzebruch本人原来是跟Hopf做博士，做一些复曲面的分类问题。后来到了普林斯顿做博士后，碰到了Kodaira等很多年轻人。 按照Bott有个演讲叫《拓扑对分析的影响》，好像Hirzebruch从德国波恩出来，懂得很少，但是就在那一年，把该学的东西：代数

几何、 层论、de Rham 理论、Hodge 理论全学会了，一年之内就证明了他的伟大的定理。Bott的意思是不要老觉得自己学的东西不够，实际上不见得。 像Hirzebruch原来刚到普林斯顿的时候知道得很少，一年之内什么都学会了。在正确的环境下面，什么都能发生。

1.4 Atiyah-Singer指标定理

还有一个整数性定理，没有那么强的上同调意义，是Borel-Hirzebruch证明的：假定M^{2n}是闭的自旋流形，则

$$\widehat{A}(M) = \int_M \det{}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}}{\sinh\left(\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}\right)} \right)$$

是整数。

刚才那个是R^{TM}除以$2\pi\sqrt{-1}$，这个除以$4\pi\sqrt{-1}$后还是一个整数！这是一个很不平凡的结果，因为存在流形它的$\widehat{A}(M)$不是整数。 比如说$\mathbb{C}P^2$，$\widehat{A}(\mathbb{C}P^2) = -\frac{1}{8}$，这个$\mathbb{C}P^2$不是自旋的， 所以说自旋条件在这里很重要。

一个自然地问题是为什么对自旋流形这个数是整数，而对非自旋流形可以不是整数？

这个是Singer访问Atiyah，Atiyah刚见到他的时候就问了这样一个问题。这个问题的答案是什么呢？答案就是Atiyah-Singer指标定理。 最后他们发现如果是自旋流形，有了度量以后，存在一个所谓的Dirac算子D_+，是椭圆微分算子，它的指标由定义是一个整数：

$$\mathrm{ind}(D_+) = \dim(\ker D_+) - \dim(\mathrm{coker}\, D_+).$$

如果有$\mathrm{ind}(D_+) = \widehat{A}(M)$，那么由定义它自然是个整数！Atiyah和Singer很快就猜出了这个定理，但是他们不会证。 Singer是泛函分析出身的，后来从听陈先生课的笔记学的微分几何，Atiyah是代数几何出生。

我们先不看具体的。更广义的看，如果是紧流形M上有两个复向量丛E和F，$D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$是一个微分算子。 如果$D$是椭圆微分算子的话，它的核跟余核都是有限维的，这是椭圆算子的基本定理。然后Gelfand1960年发表了一篇文章。 Gelfand在苏联有个讨论班，经常有各种各样的讨论，其中有一个人在上面报告了这样一个结果，就是椭圆算子的指标

$$\mathrm{ind}(D) = \dim(\ker\ D) - \dim(\mathrm{coker}\, D),$$

如果看成Fredholm算子的话这个指标是不变的，椭圆算子稍微变一下，这个指标是不变的，所以说这个指标是拓扑不变量。Gelfand就问， 一个自然的问题是，如何用已知的拓扑不变量来表达这个解析定义的指标？

所以我们遇到一个大象的两个侧面。一个侧面是Atiyah-Singer说的，$\widehat{A}$-亏格是整数，它应该是某一个椭圆算子的指标； 另一方面Gelfand在问，任意的椭圆算子的指标是什么东西的拓扑不变量？Atiyah-Singer有一个具体的例子的答案，这是他们的优势， 但是他们不知道怎么证；Gelfand那边有帮俄罗斯人一直在具体的做， 当然他们拓扑没有Atiyah他们那么好，所以至少没有猜出整体的东西。

实际上这两个方面怎么联系起来的呢，是Smale。Smale后来靠证明5维以上的庞加莱猜想获得的菲尔兹奖。他那时路过牛津，和Atiyah、 Singer聊各自在做什么。Atiyah告诉Smale他们有这个猜测，Smale说我刚刚看到Gelfand有篇文章有这个东西。 Atiyah-Singer他们找到了Gelfand的文章，知道必须要用什么样的分析工具。他们去请教很多人，包括Nirenberg等。 拟微分算子的理论就是由此发展起来的。Atiyah、Singer最后于1963年完成了指标定理的证明。

指标定理具有如下的形式：

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \left\{ \begin{pmatrix} E,\ F \\ T_{\mathbb{C}}M \end{pmatrix} \text{的陈类} \right\}.$$

对任何的椭圆算子都应该有这个形式。左边是微分算子的解空间决定的，是纯分析的；而右边是纯拓扑的，是由E, F， 复化的切空间$T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$的示性类来决定的。抽象出来就是

$$\begin{tikzcd} \text{分析} \arrow[dd] & = & \text{拓扑} \arrow[d, "\text{Chern-Weil}"] \\ & = & \int_M \text{微分形式} \\ \text{整体} & = & \int_M \text{局部}. \end{tikzcd}$$

这个你要从抽象来看，就是分析等于拓扑。这两个定理在分析和拓扑两个几乎完全不一样的东西之间建起了一个桥梁。而后面的拓扑不变量， 根据Chern-Weil理论又可以写成微分形式在流形上的积分。要写成这个样子的话，又可以看到局部的微分形式的积分， 得到一个整体的不变量。

所以我们从二维Gauss-Bonnet开始一直强调的，局部跟整体之间的关联， 在Atiyah-Singer指标定理里面得到继续的发扬光大。 然后这个定理应用到各种各样的算子里面就包

含了刚才我们提到的所有的大定理：

Gauss-Bonnet-Chern 定理，
Hirzebruch 符号差定理，
Hirzebruch-Riemann-Roch 定理，
Borel-Hirzebruch 定理。

然后也想强调一下就是说因为指标定理叙述本身就包含陈类，我们开始说的2004年把Abel奖给Atiyah-Singer， 把邵逸夫奖给陈先生里面巧合的同时，也有密切的关系。从这个关系来讲，陈类本身就出现在20世纪最基本定理的叙述里是中国数学家的光荣。 然后这后面当然包含了很多大定理，同时在数学的各个领域，特别后来发展在数学物理里面都有很大的影响和应用。 本身拓扑和分析两个完全不一样的东西联系起来，自然会对很多其他的数学产生影响。

因此也不奇怪大家从各个侧面来研究、理解这个定理。比较典型的证明有三种。第一种是Atiyah-Singer最早的证明， 他们是模仿Hirzebruch关于符号差定理的证明，用了Thom发展起来的配边理论，配边证明。第二种证明理论上更好想象， 他们是用Grothendieck对Hirzebruch-Riemann-Roch定理的证明。他们先把流形M，不一定要等距，嵌入到一个大的球面S^{2N}上， 这是可以做的。然后通过K-理论办法把这个问题化到球面上的问题，而球面上所有的向量丛全体的K-群分类由Bott周期性定理是知道的。 你要在球面上验证指标定理的话，你就把向量丛的生成元拿出来，具体的验证一下，就发现这个成立，成立了以后，再拉回来。 也可以看成某种“transgression”，在球面上特别好做，再拉回来。这个叫做K-理论证明，用到了Bott周期性定理：

$$\widetilde{K}\left(S^{2N}\right)=\mathbb{Z}.$$

第三个证明就是我们原来要说的局部指标理论，热方程证明。热方程和微分几何，特别是和后来的物理有更紧密的联系。 刚才提到的虞言林教授在这方面有重要的贡献。我是很幸运的，他正好在这上面做工作的时候，我进了数学所跟他学习指标理论。

1.5 McKean-Singer公式

我们大致地介绍一下热方程证明。我们看一个椭圆微分算子$D:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$，我们假定E跟F 都有Hermitian度量， 然后我们在流形上有黎曼度量，这样就有个体积形式，E和F的截影空间$\Gamma(E),\Gamma(F)$都变成了pre-Hilbert空间， 并且有内积。然后有了这个算子以后，我们可以定义它的伴随算子$D^*:\Gamma(F)\to\Gamma(E)$,

$$\left\langle Ds,\, s^{'}\right\rangle=\left\langle s,\, D^{*}s^{'}\right\rangle.$$

这里$s\in\Gamma(E)$, $s^{'}\in\Gamma(F)$。有这了两个算子以后就可以取Laplacian，

$$\begin{aligned} D^*D: &\ \ \Gamma(E)\to\Gamma(E),\\ DD^*: &\ \ \Gamma(F)\to\Gamma(F). \end{aligned}$$

D^*D, DD^* 都是半正定的自伴椭圆算子。可以证明

$$\begin{aligned} e^{-tD^*D}: &\ \ \Gamma(E)\to\Gamma(E),\\ e^{-tDD^*}: &\ \ \Gamma(F)\to\Gamma(F) \end{aligned}$$

都是紧算子。对于任何$t>0$都可以求他们的迹，然后我们有很漂亮的公式：

McKean-Singer公式

$$\mathrm{ind}(D)=\mathrm{Tr}\left[e^{-tD^*D}\right]-\mathrm{Tr}\left[e^{-tDD^*}\right].$$

证明：首先

$$\mathrm{ind}(D)=\dim(\ker\ D)-\dim(\ker\ D^*).$$

由

$$\langle D^*D\sigma,\sigma\rangle=\langle D\sigma,D\sigma\rangle=|D\sigma|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned} \ker(D) &= \ker\left(D^*D\right),\\ \ker\left(D^*\right) &= \ker\left(DD^*\right). \end{aligned}$$

如果$\lambda\in\mathrm{Spec}(D^*D)$且$\lambda\neq 0$，则对于相应的特征向量$s\neq 0$, $D^*Ds=\lambda s$， 我们有$DD^*(Ds)=\lambda(Ds)$，并且$Ds\neq 0$. 因此

$$\lambda\in\mathrm{Spec}(DD^*).$$

综上，我们有

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(D^*D)}e^{-t\lambda}-\sum_{\mu\in\mathrm{Spec}(DD^*)}e^{-t\mu}=\dim(\ker\ D)-\dim(\ker\ D^*)=\mathrm{ind}(D).$$

□

备注： McKean-Singer公式漂亮在什么地方？左边这个ind(D)跟t没关系，右边是依赖于t。这样就可以变化t， 给你更大的自由度来研究这个问题。

2 局部指标理论

如果是紧算子的话，它的迹，可以从它的核函数得出：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[e^{-tD^*D}\right] &= \int_M \mathrm{Tr}\left[e^{-tD^*D}(x,x)\right] d\mathrm{Vol}_x \\ &:= \int_M \mathrm{Tr}\left[P_t(x,x)\right] d\mathrm{Vol}_x,\end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr}\left[e^{-tDD^*}\right] := \int_M \mathrm{Tr}\left[Q_t(x,x)\right] d\mathrm{Vol}_x.$$

根据McKean-Singer公式我们有

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \left(\mathrm{Tr}\left[P_t(x,x)\right] - \mathrm{Tr}\left[Q_t(x,x)\right]\right) d\mathrm{Vol}_x.$$

两个热核在求迹以后相减，然后再积分。我们知道，热核在物理跟方程里面是非常重要的函数，已经被很多人研究了，而且你知道t 趋于0的时候，它完全可以用流形每一点附近局部的量来表示:

$$\begin{aligned}P_t(x,x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(a_0 + a_1 + \cdots + a_{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} + \cdots\right); \\ Q_t(x,x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(b_0 + b_1 + \cdots + b_{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} + \cdots\right).\end{aligned}$$

我们把McKean-Singer公式重新叙述一下为：当t趋于0的时候我们有

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{t^{i-\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\mathrm{Tr}\left[a_i\right] - \mathrm{Tr}\left[b_i\right]\right) d\mathrm{Vol}_x + o(t).$$

注意，当 $i < \frac{n}{2}$ 时，$t^{i-\frac{n}{2}}$ 在t 趋于0时是发散的。这样右边是个发散型，而左边是个常数。所以如果要这个等式对任何t都对的话， 当$i < \frac{n}{2}$ 的时候，应该有：

$$\int_M \left(\mathrm{Tr}\left[a_i\right] - \mathrm{Tr}\left[b_i\right]\right) = 0.$$

而当$i = \frac{n}{2}$时，有

$$\int_M \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\mathrm{Tr}\left[a_{\frac{n}{2}}\right] - \mathrm{Tr}\left[b_{\frac{n}{2}}\right]\right) = \mathrm{ind}(D).$$

你看McKean-Singer公式，不需要加新的条件，你看公式本身，一下子就可以知道，热核的渐进展开应该满足这两个条件，一个是积分以后等于0， 一个是这个积分以后等

于ind(D)。于是McKean-Singer就猜有没有“miraculous cancellation”（奇迹般的抵消），至少对具体的几何算子有没有？这就是局部指标定理，局部指标定理是说：

局部指标猜想：

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left[a_i\right]-\operatorname{Tr}\left[b_i\right] &= 0, \quad i<\frac{n}{2} \\ \operatorname{Tr}\left[a_{\frac{n}{2}}\right]-\operatorname{Tr}\left[b_{\frac{n}{2}}\right] &= \text{characteristic form.}\end{aligned}$$

这是另外一种局部与整体之间的关系。当然这个一开始谁也不知道对不对。

McKean-Singer他们1968年左右在发表在JDG上的论文里面研究了最简单的二维曲面的情形。对Gauss-Bonnet定理， 对应于de Rham-Hodge算子$d+d^*$，他们证明这个局部指标定理是对的。然后提出一个问题，问高维的Gauss-Bonnet-Chern定理的局部模型对不对？他们不知道，因为什么呢？这些热核，依赖于每一点的不光是曲率还有曲率的各种各样的导数。虽然递归关系你可以分析，但是却是很复杂的东西。 而指标本身和曲率本身没有任何关于曲率的导数，所以说那些复杂的量能不能消去最后得到所需要的量，这个是他们提出一个的猜想。

这个猜想是Patodi在印度做博士的时候证明的，就是他的博士论文。Patodi做完以后，没多久，31岁就去世了。他一生只写了十三篇论文， 明年是他的70岁诞辰。Patodi是第一个对任何的维数证明了局部指标定理成立，即局部Gauss-Bonnet-Chern定理。在Patodi之后，这个方面， Gilkey同时用另外一种方法来证明这个定理，间接的，不是直接算那些个系数的，而是间接的证明那些系数必须满足一些什么性质， 通过那些性质找出一些关系。Gilkey的方法被Atiyah-Bott-Patodi用来证明了几何算子的局部指标定理。后来到了80年代， 物理学家Witten和Alvarez-Gaumé，从物理上的想法给出Dirac算子局部指标定理的一个新的解释，后来在数学物理方面产生一系列的影响。 局部指标理论最有代表性的人物是Bismut。虞言林老师在这方面也有重要的贡献。

2.1 局部Gauss-Bonnet-Chern定理

我们给出局部Gauss-Bonnet-Chern定理详细的叙述。假定M是偶数维定向的闭流形，g^{TM}是黎曼度量，∇^{TM}是Levi-Civita联络， $R^{TM}=\left(\nabla^{TM}\right)^2$是它的曲率。然后记$D=d+d^*:\Omega^{\text{even}}(M)\to\Omega^{\text{odd}}(M)$为de Rham-Hodge算子。 Patodi证明了：

局部Gauss-Bonnet-Chern定理（Patodi, 1970）

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\operatorname{Tr}\left[e^{-tD^*D}(x,x)\right]-\operatorname{Tr}\left[e^{-tDD^*}(x,x)\right]\right)d\mathrm{Vol}_x=\left\{\operatorname{Pf}\left(\frac{R^{TM}(x)}{2\pi}\right)\right\}.$$

两边积分即得到Gauss-Bonnet-Chern定理：

$$\chi(M)=\int_M \mathrm{Pf}\left(\frac{R^{TM}(x)}{2\pi}\right).$$

所以局部Gauss-Bonnet-Chern定理比Gauss-Bonnet-Chern定理更加精细。后来，Atiyah就请Patodi去普林斯顿访问， 就得到了刚才提到的Atiyah-Bott-Patodi对其它算子也对的定理。同时他和Atiyah、Singer一起把指标定理推广到带边流形的情形。

2.2 关于Dirac算子的Atiyah-Singer指标定理

我们来看Dirac算子，后来是知道所有几何上的算子，局部地都可以写成Dirac算子。所以Dirac算子是最具有代表性的算子。假定是自旋流形， 局部的话不需要这个条件，但是整体的我们需要。有了这个偶数维的自旋流形M，假定给了它度量g^{TM}，Levi-Civita联络∇^{TM}， 曲率$R^{TM}=\left(\nabla^{TM}\right)^2$。偶数维最重要的是有分次的旋量丛$S(TM)=S_+(TM)\oplus S_-(TM)$， 这是一个分次的Hermitian丛。然后联络可以提升到这个上面去，这个提升是自然的：

$$\nabla^{S(TM)}=\nabla^{S_+(TM)}\oplus\nabla^{S_-(TM)}.$$

然后旋量丛可以知道是Clifford代数的表示。对任何向量场X，$c(X)$记为Clifford作用，它把$S_+(TM)$映到$S_-(TM)$， 把$S_-(TM)$映到$S_+(TM)$。

我们取任一个Hermitian向量丛$\left(E,\, g^E\right)$，∇^E为它的Hermitian联络。 于是我们有整个张量积$S(TM)\otimes E$上的联络：

$$\nabla^{S(TM)\otimes E}=\nabla^{S(TM)}\otimes \mathrm{Id}_E\oplus \mathrm{Id}_{S(TM)}\otimes\nabla^E.$$

我们取TM的一组局部幺正基：$e_1, e_2, \cdots, e_{\dim M}$。 那么所谓的Dirac算子定义为：

$$D^E=\sum_{i=1}^{\dim M}c(e_i)\nabla_{e_i}^{S(TM)\otimes E}:\Gamma\left(S(TM)\otimes E\right)\to\Gamma\left(S(TM)\otimes E\right),$$

$$D_\pm^E:=D^E\big|_{S_\pm(TM)\otimes E}:\Gamma\left(S_\pm(TM)\otimes E\right)\to\Gamma\left(S_\mp(TM)\otimes E\right).$$

这个定义与局部幺正基的选取无关，所以是整体定义的。D^E是椭圆自伴算子，$\left(D_+^E\right)^*=D_-^E$。 然后我们可以考虑指标：

$$\mathrm{ind}\left(D_+^E\right)=\dim\left(\ker D_+^E\right)-\dim\left(\ker D_-^E\right).$$

对于Dirac算子，Atiyah-Singer指标定理可以叙述为：

Atiyah-Singer 指标定理（1963）

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}\left(D_{+}^{E}\right) &= \left\langle \widehat{A}(TM)\operatorname{ch}(E),\,[M]\right\rangle \\ &= \int_M \det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}}{\sinh\left(\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}\right)}\right)\operatorname{tr}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\nabla^{E}\right)^{2}\right)\right].\end{aligned}$$

如果$E=\mathbb{C}$为平凡丛，我们把D^E记为D，那么我们就得到：

Borel-Hirzebruch定理（1960）

$$\widehat{A}(M)=\left\langle \widehat{A}(TM),\,[M]\right\rangle\in\mathbb{Z}.$$

前面已经说过了, 自旋条件是必须的，因为$\widehat{A}\left(\mathbb{C}P^2\right)=-\frac{1}{8}$。

在看Dirac算子的局部指标定理之前我们来看Dirac算子的一个简单的应用，1963年就有的定理。

假定自旋流形(M,g^{TM})上的数量曲率为$k^{g^{TM}}$, 流形上的数量曲率是最简单的一个几何不变量，最标准的一个不变量。 取任何一点x，你在流形上取一个圆心为x，半径为r的测地球，然后取欧氏空间中半径同样为r的球，两者的体积相除， r趋于0的时候，渐进展开，展开的系数是这个:

$$\frac{\operatorname{vol}\left(B_x^{g^{TM}}(r)\right)}{\operatorname{vol}\left(B_0^{\mathbb{R}^n}(r)\right)}=1-\frac{k^{g^{TM}}(x)}{6(n+2)}r^2+o(r^2).$$

Lichnerowicz对自旋流形上的Dirac算子证明了一个漂亮的公式。

Lichnerowicz 公式（1963）： $D^2=-\Delta+\frac{k^{g^{TM}}}{4}$.

而这个Bochner-Laplacian $-\Delta$ 一定是非负的：$-\Delta\geq 0$.

Lichnerowicz 定理（1963）： 如果在M 上有$k^{g^{TM}}>0$，则$\widehat{A}(M)=0$.

证明： 因为$k^{g^{TM}}>0$，我们有$D^2=-\Delta+\frac{k^{g^{TM}}}{4}>0$。于是 $\widehat{A}(M)=\operatorname{ind}\left(D_+\right)=0$. □

这是Atiyah-Singer指标定理的深刻结果加上Lichnerowicz的一个关键观察，得到这样一个定理， 从纯粹的几何条件$k^{g^{TM}}>0$得到了一个纯粹的拓扑结果$\widehat{A}(M)=0$。证明用到了分析的方法，用到了指标定理。 这个定理把几何，拓扑，分析有机的结合了起来，是我最喜欢的定理之一。

2.3 关于Dirac算子的局部指标定理与η-不变量

现在我们就可以叙述关于Dirac算子的局部指标定理了。对于任何$x \in M$，我们有

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\mathrm{Tr}\left[e^{-tD^*D}(x,x)\right]-\mathrm{Tr}\left[e^{-tDD^*}(x,x)\right]\right)d\mathrm{Vol}_x$$

$$=\left(\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}}{\sinh\left(\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}\right)}\right)\mathrm{tr}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\nabla^E\right)^2\right)\right]\right)^{\mathrm{top}}.$$

第一个非直接的证明是由Atiyah-Bott-Patodi，Gilkey给出的，直接的证明后来由Bismut，Getzler，Berline-Vergne给出。虞言林老师是纯粹用Patodi的方法推广，几乎独立的得出直接证明，这是虞老师的贡献。

然后局部的方法，定理本身当然是强化了，但是最重要的是什么呢？最重要的是它这个方法可以推广，至少可以推广到带边流形。 如果假定自旋流形M有一个边界∂M，我们也假定所有的几何量在边界附近具有乘积结构。如果边界非空， 那么算子D_+是非椭圆的，它的核和余核都可以是无限维的。所以它的指标不是良好定义的，要良好定义就要加边界条件。 而对一般的Dirac算子，历史上经典的边界条件Dirichlet边值问题，Neumann边值问题都不是椭圆的，所以加上这类边值条件的话， 它的核和余核还是无限维。所以Atiyah-Patodi-Singer他们三个人发现了，对Dirac算子需要有一种叫整体边值条件的东西， 我们现在叫做Atiyah-Patodi-Singer边值条件。对于这个边值条件，他们证明了D_+的指标是可以定义的，并且指标是有界的。

Atiyah-Patodi-Singer 定理（1974）

$$\mathrm{ind}\left(D^E_{+,\mathrm{APS}}\right)=\int_M \det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}}{\sinh\left(\frac{R^{TM}}{4\pi\sqrt{-1}}\right)}\right)\mathrm{tr}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\nabla^E\right)^2\right)\right]-\overline{\eta}\left(D_+^{E|_{\partial M}}\right).$$

示性式还是原来的示性式，再减去一个边界项η-不变量。你如果把这边界项去掉，你光看上面的示性式，因为这个流形是非紧的， 你度量变的时候，积分是要连续的变化，不是一个拓扑不变量，更不一定是整数。这里

$$D_+^{E|_{\partial M}}:\Gamma\left(S_+(TM)\otimes E|_{\partial M}\right)\to\Gamma\left(S_+(TM)\otimes E|_{\partial M}\right)$$

是在边界上诱导的Dirac算子，它是形式自伴的椭圆算子。

对任何$s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>>0$，可以定义

$$\eta\left(D_+^{E|_{\partial M}},s\right)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}\left(D_+^{E|_{\partial M}}\right)\setminus\{0\}}\frac{\mathrm{sgn}(\lambda)}{|\lambda|^s}.$$

则$\eta\left(D_+^{E|\partial M}, s\right)$可以延拓成$\mathbb{C}$上的亚纯函数，并且在$s=0$是全纯的。 令

$$\begin{aligned}\eta\left(D_+^{E|\partial M}\right) &= \eta\left(D_+^{E|\partial M}, 0\right),\\ \overline{\eta}\left(D_+^{E|\partial M}\right) &= \frac{\dim\left(\ker D_+^{E|\partial M}\right)+\eta\left(D_+^{E|\partial M}\right)}{2}.\end{aligned}$$

$\overline{\eta}(D_+^{E|\partial M})$是谱不变量，非常难以计算。

而同时做代数几何，拓扑很多地方要求带奇点。带奇点的话，你挖掉奇点，再扩充一些，就是带边流形。因此带边流形出现在几乎所有的地方。 Atiyah-Patodi-Singer文章的动机就是要回答Hirzebruch从数论中问的一个问题，最后他们用这个定理解决了Hirzebruch的数论猜想。 所有的出发点都是局部指标，从McKean-Singer公式到Patodi，然后到Atiyah-Bott-Patodi，Gilkey等发展起来的一套技术， 影响了数学的很多方面，包括几何，拓扑，数论以及数学物理，比如说Chern-Simons规范理论。而Atiyah在他的全集里面， 他写总结介绍他的文章时，说这三篇关于“spectral asymmetry”的文章是他曾经做过的最满意的合作。去年在巴黎碰见他，吃饭的时候他说， 最近美国什么地方邀请他写一个，就是说你最代表性的一个工作，他说他就提这个Atiyah-Patodi-Singer定理， 而不是我们想象的Atiyah-Singer指标定理。当然你取边界为空集的话就得到了原来的Atiyah-Singer公式。

然后顺便提一下最近。我们刚才提了η-不变量到处会出现。事实上最近我和唐梓洲教授有个结果，这个文章才8页， 我们通过计算解析的η- 不变量，得到下面一个完全是几何的结果。

定理（Tang-Zhang, Adv. Math., 2014） 对于伪$\mathbb{H}P^2$（称为Eells-Kuiper四元投影平面）M， 对其上的任何一点p，存在M上的黎曼度量使得经过点p的所有测地线是简单闭的并且都具有相同的长度。

这个定理是对Bérard-Bergery与Besse提出的一个长时间公开问题的回答。他们法国人有一帮人研究这类问题。

到了1986年，Bismut发表了他的论文：

The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs. (Invent. Math. 83 (1986))

对一簇算子，它有指标簇。指标簇是在底空间的K-群里的元素。Bismut把热方程的方法推广到算子簇， 他采用了Quillen引进的超联络的概念，给出了算子簇的局部指标定理。86年国际数学家大会（ICM）上他做了45分钟报告“指标理论与热方程”。 从那个

文章开始，包括这个45分钟报告，局部指标理论进入了一个新的发展阶段。

晚近的发展一直在强调数学物理，包括Abel奖发给Atiyah和Singer，也强调他们对数学物理的影响。 很高兴我们看到中国数学家在数学物理方面也有重大的贡献。这是2004年写的，现在有很多的添加，2004年我写的有丘成桐先生， 后面大部分是他以前的学生：田刚，李骏，刘克峰。然后是周坚（清华大学），当时那年他和刘克锋，刘秋菊合作解决了马里诺-瓦发猜想， 文章在JDG上发表。还有阮勇斌，李安民（四川大学），李安民现在是院士。后面肯定还有很多人，包括这十年新一代在不断的成长。 但是我们返到最前面，就是说欧高黎嘉陈，假如我们后面还要加谁的话，我斗胆随便加点，例如Atiyah、Witten，还有Connes（非交换几何）。 美国数学会的Notice上曾经有一篇文章说80年代指标理论有两大进展，一个是Quillen和Bismut，一个是Connes。

顺便说一下，我上面讲的很多故事都是从《数学译林》上看到的。我建议年轻学生经常看看《数学译林》，知道一些故事， 了解数学家是如何做数学的。不要动不动人家说物理学家如何如何的时候无言以对。你们可以说数学家做了什么，做数学有多好， 等等。宣传数学，提高数学家的形象。

最后回到陈先生的划分。欧几里得是原始人，笛卡尔几何是穿衣人，流形几何是现代人。现在到了21世纪， 我们希望见证数学与物理的交融发展，看到数学与物理的统一性。所以我们需要新的时代。用十年前的名词，我不知道现在还有没有人讲， 我们希望看到新新人类的时代。谢谢大家！

主持人： 在一个半小时之内，张教授从几千年前的欧几里得开始，沿着欧高黎嘉陈一路讲下来， 给我们留下了非常深刻的印象。我更感兴趣的是张院士关于新新人类的这个邀请，希望在座的年轻人会有人勇敢的站起来接受这个邀请。

最后让我们以热烈的掌声谢谢张教授！