第39卷第4期 数 学 学 报 Vol.39, No. 4
1996年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA July, 1996

关于复超曲面上具正数量曲率之 Riemann 度量的存在性

张伟平

(南开大学数学研究所，天津 300071)

摘 要: 本文用作者的 Rokhlin 同余公式来计算旋复超曲面的 α- 不变量. 将此结果与 Lawson-Michelshon 及 Hirzebruch 以前的结果相结合并应用 Stolz 的一定理，可以确定什么样的旋复超曲面上具有数量曲率为正的 Riemann 度量.

关键词: Rokhlin 同余式，复超曲面，正数量曲率

引言

判断一个流形上是否存在具正数量曲率的 Riemann 度量，是微分几何中的一个重要问题. 在本文中，我们对一类重要的流形 —— 复射影空间中的正则超曲面，给出正数量曲率度量的存在性判断. 基于已知的结果 [3,4], 我们只要对 $4k+1$ 维复超曲面做出判断. 以下我们将把讨论集中在这一维数. 我们的证明是基于 Stolz[4] 的重要结果和作者的 Rokhlin 型同余公式 [5].

1 Stolz 的定理

我们首先叙述 Stolz 证明的 Gromov-Lawson 猜测，我们将只对我们要讨论的维数进行叙述.

定理 1[4] 设 M 是一个 $8k+2$ 维 $(k\geq 1)$ 的紧致单连通 Spin 流形. 则 M 上存在具有正数量曲率的 Riemann 度量的充要条件是它的 α- 不变量为零.

定理中涉及的 α- 不变量是指著名的 Atiyah-Milnor-Singer mod 2 配边不变量 [3]. Atiyah 和 Singer 的 mod 2 指标定理 [3] 给出了此不变量的解析解释. 而 α- 不变量与正数量曲率度量的存在性之间的关系，是由 Hitchin[3] 首先研究的.

2 Rokhlin 同余公式以及 α- 不变量的计算

我们所要叙述的 Rokhlin 公式，使许多情形下 α- 不变量的计算成为可能.

设 K 是一个 Spin^c- 流形. 我们假定 K 是紧致的，并具有维数 $8k+4$. 根据定义，在 K 上存在一个复线丛 ξ 使得 $c_1(\xi)\equiv w_2(TK)(\mathrm{mod}\,2)$. 设 B 是 K 的一个 $8k+2$ 维定向紧子流形，满足条件 $[B]\in H_{8k+2}(K,Z)$ 是 $c_1(\xi)\in H^2(K,Z)$ 的 Poincaré 对偶. B 的存在性是明显的. 同时我们也容易验证 B 是一个 Spin 流形，并且 K 上的 Spin^c- 结构诱导了 B 上的一个 Spin 结构. 在 [5] 中，作者证明了下面的 Rokhlin 型同余公式.

1994 年 10 月 5 日收到.
国家自然科学基金资助项目.

定理 2[5]　下列公式成立,

$$\alpha(B) \equiv \left\langle \widehat{A}(TK)\exp\left(\frac{c_1}{2}\right), [K]\right\rangle (\bmod 2).$$

现在取 K 为 (复) $4k+2$ 维 ($k \geq 1$) 复射影空间 CP^{4k+2}. 对任何正整数 d, 我们记 $V^{4k+1}(d)$ 为 CP^{4k+2} 中的 d 次正则复超曲面. 则容易验证当 d 为奇数时, $K = CP^{4k+2}$, $B = V^{4k+1}(d)$ 满足定理 2 中的条件. 同时, 由于 $k \geq 1$, 由代数几何中的熟知结论, B 是单连通的, 从而具有唯一的 Spin 结构.

下面我们给出 $V^{4k+1}(d)$ 的 α- 不变量的计算公式.

推论 3　下列公式成立,

$$\begin{aligned}\alpha(V^{4k+1}(d)) &= \frac{1}{2^{4k+2}(4k+2)!}\prod_{i=1}^{2k+1}(d^2-(2i-1)^2) \quad (\bmod 2)\\ &= \begin{cases} 0, & d \leq 2k+1, \\ C^{4k+2}_{[\frac{d}{2}]+2k+1}, & d \geq 2k+3. \end{cases}\end{aligned}$$

证明　设 c 为 $H^2(CP^{4k+2})$ 的生成元. 则熟知 [1] TCP^{4k+2} 的 Pontrjagin 示性类由下列公式给出,

$$p(TCP^{4k+2}) = (1+c^2)^{4k+3}.$$

由定理 2, 可以得到

$$\begin{aligned}\alpha(V^{4k+1}(d)) &= \left\langle \left(\frac{c/2}{\sin h(c/2)}\right)^{4k+3}\exp\left(\frac{dc}{2}\right), [CP^{4k+2}]\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{2^{4k+2}}\left(\frac{1}{\sin h(z)}\right)^{4k+3}\cos h(dz)dz,\end{aligned}$$

其中积分为关于原点的围道积分.

另一方面, 对奇数的 d, 我们有

$$\cos h(dz) = \cos h(z)\left\{1 + \sum_{i=1}^{[\frac{d}{2}]}\frac{(d^2-1)\cdots(d^2-(2i-1)^2)}{(2i)!}\cdot \sin h^{2i}(z)\right\}.$$

两个公式并起来就得到推论 3.

以下我们决定何时 $\alpha(V^{4k+1}(d))$ 为零, 何时非零.

首先对任何非负整数 n, 记它的二进展开为 $n = a_0(n) + a_1(n)2 + \cdots + a_k(n)2^k + \cdots$, $a_i(n) \in \{0,1\}$, $i \geq 0$. 数论中的一个基本结果告诉我们 C^n_{m+n} 是奇数的充要条件是对所有 $i \geq 0$ 都有 $a_i(n) + a_i(m) \leq 1$.

回到我们的几何情形, 我们写 d 为 $d = 4k+2l+3$, 并且假定 $l \geq 0$.

由推论 3, 我们立刻得到

推论 4　$\alpha(V^{4k+1}(d)) \equiv 1 (\bmod 2)$ 当且仅当对任何 $i \geq 0$ 都有 $a_i(4k+2) + a_i(l) \leq 1$.

推论 4 与定理 1 结合起来就给出:

定理 5　在 $V^{4k+1}(4k+2l+3)$ 上存在具有正数量曲率的 Riemann 度量的充要条件是存在一个 $i \geq 0$ 使得 $a_i(4k+2) = a_i(l) = 1$.

注记 6 若 d 为偶数，则 $V^{4k+1}(d)$ 不是 Spin 流形. 由 Lawson-Gromov 的一个结果 [3], $V^{4k+1}(d)$ 上总存在具正数量曲率的 Riemann 度量.

注记 7 由定理 5, 我们知道在无限多个 CP^{4k+2} 的超曲面上，存在有具正数量曲率的 Riemann 度量. 同时在无限多个 CP^{4k+2} 的复超曲面上，不存在具正数量曲率的 Riemann 度量. 此种现象在其他维数是不存在的.

注记 8 定理 2 最早出现在预印本 [6] 中. 在那里我们给出了定理 2 的一个配边证明. 由于后来找到了更好的 K- 理论证明 [5], 所以现在只发表定理 2 的这个应用.

参 考 文 献

[1] Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Geometry, 3rd Ed. Springer-Verlag, 1966.
[2] Hitchin N. Harmonic spinors. *Adv in Math,* 1974, **14**: 1–55.
[3] Lawson H B, Michelsohn M -L. Spin Geometry. Princeton Univ Press, 1989.
[4] Stolz S. Simply connected manifolds of positive scalar curvature. *Ann Math,* 1992, **136**: 511–540.
[5] 张伟平. Spin^c-manifolds and Rokhlin congruences. *C R A S Paris,* 1993, A **317**: 689–692.
[6] 张伟平. Elliptic genera and Rokhlin congruences. 预印本 IHES/M/92/76.

The Existence of Riemann Metric with Positive Scalar Curvature over Complex Hypersurface

Zhang Weiping
(*Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071*, China*)

Abstract: In this paper we apply the Rokhlin type congruence of the author to compute the α-invariant of spin complex hypersurfaces. Combining with a theorem of Stolz, and previous calculations of Hirzebruch and Lawson-Michelsohn, our result determines whether a spin complex hypersurface of dimension not less than three would carry a Riemannian metric of the positive scalar curvature.

Keywords: Rokhlin congruence, Complex hypersurface, Positive scalar curvature