科学通报
第41卷 第4期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1996年2月

子符号差算子及其局部指标定理*

张伟平
(南开数学研究所，天津 300071)

关键词 子符号差算子 局部指标 示性式及示性类

设 M 是一紧致无边的定向微分流形，设 E 为 M 的一个定向切子丛，我们假定 $k=\dim E$ 为偶数.

设 g^{TM} 为切丛 TM 上的一个度量，记 E' 为 TM 中关于 g^{TM} 的正交补. 记 g^E 及 $g^{E'}$ 为 g^{TM} 在 E 及 E' 上的限制，则 TM 有正交分解 $TM=E\oplus E'$, $g^{TM}=g^E\oplus g^{E'}$, 并且 E' 上有自然的诱导定向.

令 $\Lambda(T^*M)=\oplus_{i=1}^{\dim M}\Lambda^i(T^*M)$ 为 M 的复系数外代数丛. 记 $\Omega(M)=\oplus_{i=0}^{\dim M}\Omega^i(M)=\oplus_{i=0}^{\dim M}\Gamma(\Lambda^i(T^*M))$ 为 $\Lambda(T^*M)$ 的光滑截影全体，则 g^{TM} 在 $\Lambda(T^*M)$ 及 $\Omega(T^*M)$ 上有自然的诱导度量和内积.

熟知 TM 及 T^*M 在 g^{TM} 下等价. 对任何的 $e\in\Gamma(TM)$, 令 $\hat{c}(e)=e\Lambda+i_e$, 其中 $e\Lambda$, i_e 分别是 $e\in T^*M\simeq TM$ 在 $\Omega(M)$ 上的外乘积及内乘积作用. 设 $f_1,\cdots,f_k$ 为 E 的一组(局部)定向么正基. 令

$$\hat{c}\,\partial(E,g^E)=\hat{c}(f_1)\cdots\hat{c}(f_k), \tag{1}$$

易证 $\hat{c}(E,g^E)$ 不依赖于么正基 $\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant k}$ 的选取.

记 $\varepsilon\in\mathrm{End}(\Lambda(T^*M))$ 使得 $\varepsilon|_{\Lambda\,\mathrm{even}\,(T^*M)}=Id$, $\varepsilon|_{\Lambda\mathrm{odd}\,(T^*M)}=-Id$.

命

$$\tau(M,g^E)=(\sqrt{-1}\,)^{-\frac{k(k+1)}{2}}\varepsilon\,\hat{c}(E,g^E), \tag{2}$$

则经验算有 $\tau(M,g^E)^2=Id$.

令 $\Lambda\pm(T^*M,g^E)$ 为由下式决定的 $\Lambda(T^*M)$ 的子丛:

$$\Gamma(\Lambda\pm(T^*M,g^E))=\{\omega|\omega\in\Gamma(\Lambda(T^*M)),\ \tau(M,g^E)\omega=\pm\omega\}. \tag{3}$$

记 $\Omega\pm(M,g^E)=\Gamma(\Lambda\pm(T^*M,g^E))$ 为 $\Lambda\pm(T^*M,g^E))$ 的光滑截影全体.

记 d 为 $\Omega(M)$ 上的外微分算子，δ 为 d 关于 $\Omega(M)$ 上自然诱导内积的(形式)伴随算子. 令 D_E 为下式给出的 $\Omega(M)$ 上的微分算子:

$$D_E=(\sqrt{-1}\,)^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{1}{2}\,(\hat{c}(E,g^E)(d+\delta)+(d+\delta)\hat{c}(E,g^E)). \tag{4}$$

容易验证，D_E 是 $\Omega(M)$ 上的一阶(形式)自伴椭圆微分算子，并且将 $\Omega_\pm(M,g^E)$ 互换.

1995-04-12 收稿，1995-08-12 收修改稿

*国家教育委员会及国家自然科学基金资助项目

定义 D_E 在 $\Omega_+(M, g^E)$ 上的限制称为 (E, g^{TM}) 的子符号差 (sub-signature) 算子，并记为 $D_{E,+}$. 它把 $\Omega_+(M, g^E)$ 映到 $\Omega_-(M, g^E)$.

记 $\exp(-tD_E^2)$ 为 D_E^2 的热算子，记 dV_M 为 g^{TM} 决定的 M 上的体积元. 命 $p_t(x, y)$ 为 $\exp(-tD_E^2)$ 关于 dV_M 的核.

回顾一下，$\tau(M, g^E)$ 决定了 $\Lambda(M)$ 上的一个 $\mathbb{Z}_2$ -分次结构 (也称超结构) $\Lambda(M)=\Lambda+(M, g^E)\oplus\Lambda-(M, g^E)$. 记 tr_s^τ 为由此分次结构决定的超迹 (supertrace).

现在命 ∇^{TM} 为 g^{TM} 的 Levi-Civita 联络, 命 ∇^E 及 $\nabla^{E'}$ 为 ∇^{TM} 在 E 及 E' 上的限制，并分别记 ∇^{TM}, ∇^E 及 $\nabla^{E'}$ 的曲率为 R^{TM}, R^E 及 $R^{E'}$.

本简报的主要结果为如下之局部指标定理.

定理 下面的收敛公式在 M 上一致成立:

$$\lim_{t\to 0}\mathrm{tr}_s^\tau[p_t(x, x)]\,dV_M(x)=$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{k}{2}}\left\{\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R^{TM}/4\pi}{\sinh(R^{TM}/4\pi)}\right)\cdot\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\cosh\left(\frac{R^E}{4\pi}\right)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sinh(R^{E'}/4\pi)}{R^{E'}/4\pi}\right)\cdot\mathrm{Pf}\left(\frac{R^{E'}}{2\pi}\right)\right\}^{\max}(x),\quad\forall x\in M. \tag{5}$$

由此定理，Mckean-Singer 公式以及示性类的陈省身 - Weil 理论[1] 立即得到下面的推论.

推论 下面的式子成立:

$$\mathrm{ind}\,D_{E,+}=\langle\mathscr{L}(E)\,e(TM/E),[M]\rangle, \tag{6}$$

其中 $\mathscr{L}(E)$ 为 E 的 Hirzebruch $\mathscr{L}$ - 示性类，$e(TM/E)$ 为商丛 TM/E 的 Euler 示性类.

注 1 令 $E=0$ 或 $E=TM$, 则 (6) 式分别表现为著名的 Gauss-Bonnet- 陈省身公式和 Hirzebruch 符号差公式[1]. 因此我们的结果统一了这两个经典定理.

注 2 我们可以在 D_E 的定义中扭合 (twist) 一个 M 上的向量丛作为系数. 这时有相应的扭合 (twisted) 指标定理，它可以用来给出 $e(TM/E)$ 的解析解释.

注 3 对于 $\dim E$ 为奇数的情形，有相应的奇指标定理及其局部形式.

注 4 本文内容可以应用的一类重要例子是当 M 为一个纤维丛甚或叶状结构 (foliation) 的情形，与此相关的问题将另外作讨论.

本简报的内容将在其他地方给出详细的叙述及证明.

参 考 文 献

1 Berline N, Getzler E, Vergne M. Heat Kernels and Dirac Operators. Berlin: Springer-Verlag, 1992